

Fracciones

"Dividir por el de abajo y multiplicar por el de arriba"

Liliana Pazos | Maestra. Formadora de maestros en Enseñanza de la Matemática.



Muchas veces escuchamos que los alumnos usan este "procedimiento-frase" para calcular una fracción de una cantidad, algoritmo con el que la mayoría de las veces resuelven exitosamente la situación que se les presenta.

¿Qué encierra esta frase?

¿Es cierto que para calcular una fracción de una cantidad, dividir la misma por el denominador de la fracción y multiplicar por su numerador permite siempre llegar al resultado que se busca, o estamos frente a un procedimiento engañoso que resulta solamente en algunos casos y casi por casualidad?

Como veíamos en un artículo anterior, hay varios problemas en el abordaje de las fracciones que no favorecen la construcción del concepto, haciendo que muchas veces los alumnos usen procedimientos mecanizados que no dan cuenta de una real comprensión de los procedimientos que despliegan.

Hemos visto también cómo la supremacía del trabajo con la relación parte-todo en función de las representaciones gráficas deja poco espacio para el trabajo con otras relaciones y contextos que aportarían a la comprensión.

En aquella ocasión habíamos recortado, dentro de este contenido, las representaciones gráficas. En el caso particular al que nos referiremos hoy, vamos a recortar el cálculo de fracciones. Obviamente, aun cuando estamos

focalizándonos en ambos aspectos por separado, esto es al solo efecto del análisis. En el trabajo de aula deberían darse simultáneamente en tanto, como veremos, el cálculo refiere a un aspecto y la representación a la que aludíamos en el artículo anterior a otro, pero en esencia estamos haciendo el mismo proceso.

Analicemos entonces posibles razones por las cuales los alumnos llegan a la conclusión que referíamos en el comienzo del artículo.

Lo usual es que se proponga a los alumnos calcular una fracción menor que la unidad, a partir de esta.

Por ejemplo, calcular $\frac{3}{5}$ de 800.

Para ello, y dado que la unidad se representa con $\frac{5}{5}$, se divide la cantidad entre 5 y se multiplica el resultado de la división por 3.

¿Qué sucedería si la situación indicara que $\frac{4}{5}$ son 800 y se debiera buscar la unidad?

Pensemos en esta situación:

5 amigos compran un regalo y dividen el costo en partes iguales. 4 de ellos ya han pagado su parte, por lo que ya han reunido \$ 800. ¿Cuál es el costo total de la compra?

En este caso, si bien cada uno paga $\frac{1}{5}$ del regalo, es decir, si bien estamos trabajando con quintos y 5 es el denominador de la fracción, no es dividir entre 5 lo que corresponde hacer.



En efecto, para averiguar cuánto pagó cada uno de los 4 amigos, debemos dividir entre 4, porque:

$$4/5 \rightarrow 800$$

$$1/5 \rightarrow 800 : 4 \text{ (y no dividido 5, ya que se conoce el valor de 4 partes)}$$

$$5/5 \rightarrow \frac{800 \times 5}{4}$$

¿Dónde quedó lo de dividir entre el denominador y multiplicar por el numerador? En este caso se hace exactamente a la inversa.

Calcular una fracción de un conjunto dado y encontrar el conjunto unidad conociendo la fracción correspondiente a un subconjunto de él, son situaciones distintas que exigen poner en juego relaciones complejas.

¿Cuál es entonces el origen de la “regla” a la que aludíamos en el título de estas reflexiones?

Probablemente, luego de varios ejercicios en los que debe calcularse una fracción de un conjunto dado, los alumnos hacen una falsa generalización, en el entendido que el procedimiento que sirve en un caso puntual puede extenderse a los casos en que deba buscarse la unidad a partir de un subconjunto de la misma. Suelen entonces generalizar este procedimiento, al que nos

referíamos en el título, de dividir la cantidad por el denominador y multiplicar por el numerador para efectuar cualquier cálculo referido a fracciones.

Por lo tanto, la consecuencia de enfrentar a los alumnos mayoritariamente a situaciones del primer tipo (calcular $3/5$ a partir de la unidad), puede ser que se conciba equivocadamente que si se trabaja con quintos, siempre debe dividirse entre 5, asociando ese 5 al denominador de la fracción. Si bien es cierto que en ese caso debe dividirse entre 5, esto no es indicado por el denominador (porque se trabaje con quintos), sino porque partimos de 5 partes (lo que está indicado por el numerador) en el sentido de que partimos de $5/5$ y queremos calcular $3/5$.

Veamos otro ejemplo: calcular $2/5$ de 800.

La unidad, 800, se representa con $5/5$. Para calcular $1/5$ debo dividir entre 5. El problema es si se debe dividir entre 5 porque son quintos o porque parto de 5 partes para encontrar una. Seguramente estamos de acuerdo en que corresponde el segundo caso. Es decir, dividimos entre 5 porque conocemos 5 partes y queremos encontrar 1, no importa si son quintos, cuartos, medios o décimos; tengo 5 partes y quiero encontrar una, divido entre 5.

Pero entonces el que me está indicando entre cuánto debo dividir es justamente el numerador, que me señala el punto de partida, y no el denominador.

Pensemos ahora otras situaciones que podríamos proponer para enriquecer estas relaciones y analicemos algunos ejemplos de cada una.

A) Hallar una fracción del tipo $1/n$ a partir de la unidad¹



Calcular $1/6$ de 800

En este caso, 800 se representa por $6/6$, por lo que para calcular $1/6$ corresponde $800 : 6$.

Este y el siguiente son los casos que trabajamos con mayor frecuencia.

$$1/6 \text{ de } 800 \rightarrow 800 : 6$$

B) Hallar una fracción del tipo m/n de una unidad dada



a) Calcular $3/7$ de 800

Es el caso que da nombre a estas reflexiones, ya que la unidad, 800, se representa con $7/7$ y, por lo tanto, para calcular $3/7$, calculamos primero $1/7$ dividiendo 800 entre 7. Luego buscamos 3 de esas partes, multiplicando el resultado de la división por 3.

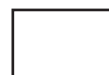
$$3/7 \text{ de } 800 \rightarrow \frac{800 \times 3}{7}$$

b) Calcular $9/7$ de 800

Es el mismo caso que el anterior, aunque no se presenta frecuentemente. La fracción buscada es mayor que la unidad.

En estos dos casos, en los que se calcula la fracción de un conjunto, vale la “regla” aludida. Pero ¿qué pasa con los siguientes en los que debe calcularse la unidad a partir de una fracción de ella o una fracción a partir de otra de la misma unidad?

C) Hallar la unidad a partir de una fracción de ella del tipo $1/n$



Representa la unidad, sabiendo que la parte que se presenta es $1/8$ de la misma.

Calcular la unidad sabiendo que $1/8$ es 800.

En este caso partimos de una de las partes y debemos completar las 8, ya que la unidad se representa con $8/8$, para lo cual es necesario multiplicar el valor de $1/8$ por 8.

$$1/8 \rightarrow 800$$

$$8/8 \rightarrow 800 \times 8$$

D) Hallar la unidad a partir de una fracción del tipo m/n



Estos son los $2/5$ de una unidad. Representa la unidad.

Calcular la unidad, sabiendo que $2/5$ son 800.

En esta situación partimos de 2 partes para obtener la unidad que, como tal, se representa con $5/5$. Por lo tanto será necesario calcular primero $1/5$. Para ello, ya que partimos de $2/5$, debemos dividir entre 2 (aunque estemos trabajando con quintos). Para componer la unidad debemos tener 5 de esas partes y, por lo tanto, se debe multiplicar por 5 el resultado de la división, en el entendido que $1/n$ es tal en tanto $1/n \times n = n/n$

$$2/5 \rightarrow 800$$

$$5/5 \rightarrow \frac{800 \times 5}{2}$$

¹ En cada caso se adjunta el ejemplo correspondiente, tomado del artículo de representaciones gráficas, para poder establecer un paralelo entre ambas situaciones.

E) Hallar la unidad a partir de una fracción de ella del tipo m/n con $m > n$



Estos son $6/4$ de la unidad. Representa la unidad.

Calcular la unidad, sabiendo que $6/4$ son 800. En este caso partimos de una fracción mayor que la unidad. Igual que en el caso anterior, primero debemos hallar $1/4$ pero, en este caso, el resultado final será menor que el número del cual partimos. Por lo tanto, buscar $1/4$ partiendo de $6/4$ implica dividir entre 6, puesto que se necesita calcular 1 parte de 6.

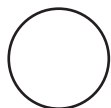
$$6/4 \rightarrow 800$$

$$1/4 \rightarrow 800 : 6$$

y luego de obtenido $1/4$, se deberá calcular la unidad que se representa con $4/4$.

$$4/4 \rightarrow \frac{800 \times 4}{6}$$

F) Hallar una fracción del tipo m/n a partir de otra p/n



Estos son $8/4$ de la unidad. Representa $3/4$ de la misma unidad.

a) Calcular $3/5$ sabiendo que 800 son $8/5$. Conocemos $8/5$ y debemos calcular $3/5$. Es necesario calcular primero $1/5$ partiendo de $8/5$. Por lo tanto:

$$8/5 \rightarrow 800$$

$$1/5 \rightarrow 800 : 8 \quad (\text{puesto que partimos de 8 para buscar 1})$$

$$3/5 \rightarrow \frac{800 \times 3}{8}$$

b) Calcular $7/5$ sabiendo que 800 son $4/5$. Estamos frente al mismo caso con la diferencia de que, si bien en el anterior es necesario

calcular una fracción menor que la unidad partiendo de una mayor que la misma, este es el caso inverso. Es necesario calcular una fracción mayor que la unidad a partir de una menor que esta. Pero el procedimiento es el mismo: calcular primero una parte $-1/n-$ en función de cuál es la cantidad de partida y calcular luego la cantidad que se nos pide: p/n .

$$4/5 \rightarrow 800$$

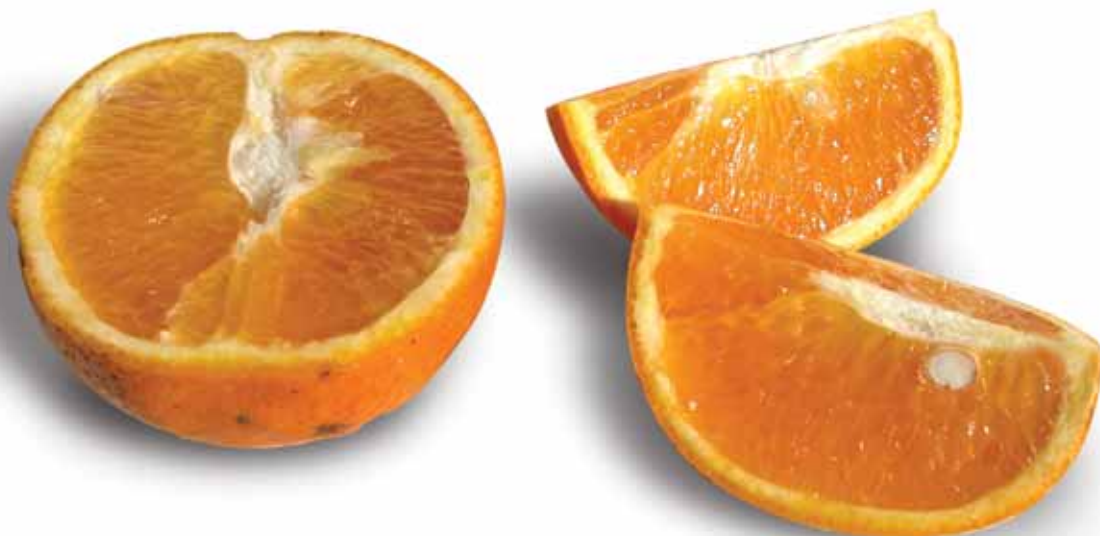
$$1/5 \rightarrow 800 : 4$$

$$7/5 \rightarrow \frac{800 \times 7}{4}$$

Es interesante observar que de los 8 casos presentados, solo en 2 de ellos es necesario dividir entre el número que representa el denominador de la fracción. En los 6 restantes, esto no sucede. ¿Qué aconteció entonces con lo que enunciaba la “regla” a la que nos referíamos?

El procedimiento que emplean los alumnos resulta efectivo cuando se parte de la unidad, pero no lo es en otros casos. Si nos preguntamos por qué razón entonces los alumnos llegan a esta conclusión, la respuesta aparece claramente: probablemente porque siempre proponemos situaciones en las que debe realizarse el cálculo a partir de la unidad, y como numerador y denominador son iguales para representar la unidad, los alumnos no tienen muy claro cuál de ambos es el que da “señales” para saber entre cuánto debo dividir. Por lo tanto concluyen que es el denominador, porque es el que caracteriza las partes cuando, en realidad, esto no siempre es así.

Enfrentar a los alumnos a diversidad de situaciones en las que no siempre deba calcularse una fracción de un conjunto dado, les obligaría a pensar cada situación, estableciendo las necesarias relaciones entre los términos de las fracciones en juego y la cantidad sobre la que se debe calcular, lo que favorecería la comprensión de estas relaciones. Lo esperable sería que no se pensara en ninguna regla y se razonara cada situación separadamente, lo que evidenciaría comprensión de lo que se está haciendo. Pero como de establecer generalizaciones se trata la Matemática, en todo caso se acercaría más a una generalización pensar que debe dividirse por el numerador -ya que es este el que indica el punto de partida- y multiplicar por el nuevo numerador.



La conclusión a la que los alumnos deberían arribar es que, independientemente de la clase de fracciones que esté en juego -cuartos, séptimos o novenos-, el que indica el número de partes que tenemos es el numerador y, por lo tanto, es este el que me señala por cuánto debe dividirse para encontrar el valor de una parte.

Como se podrá apreciar en este recorrido, son varios los casos que se pueden proponer para calcular fracciones.

Cada docente buscará la contextualización de estas situaciones o las presentará simplemente en contextos intramatemáticos para poder, justamente, explorar estas relaciones con sus alumnos.

Lo importante sería que, en cada caso, los alumnos pudiesen analizar los datos para decidir el procedimiento a emplear y no aplicar falsas generalizaciones que conduzcan a errores frente a otras situaciones, o paralicen a los alumnos porque aun aplicando la “regla construida”, el resultado no es correcto.

Hemos constatado en estudiantes magisteriales, su paralización frente a situaciones de este tipo porque, según sus explicaciones, “¿cómo iba a dividir entre 5 si estaba trabajando con cuartos?”.

Hemos analizado varios ejemplos para afirmar que “no siempre es cierto que para calcular una fracción, deba dividirse por el denominador y multiplicar por el numerador”.

Con ello creemos haber puesto en el centro de la discusión cuán peligroso puede ser, para la construcción de los conceptos, no recorrer todos los casos posibles, generalizando a partir de algunas conclusiones que generan falsas creencias que pueden convertirse en obstáculos importantes para la comprensión.

Para finalizar habría que pensar qué relaciones puede establecer el alumno entre pintar $\frac{2}{4}$ de un rectángulo y calcular los $\frac{2}{4}$ de una cantidad. Sin la intervención docente que andamie estas relaciones, no demasiadas. Sin embargo, la escuela generalmente salta de un caso al otro dando por sentado que el alumno, solamente por resolver problemas y ejercicios, puede establecer los vínculos entre ambas situaciones, lo que no es para nada sencillo.

Son diferentes situaciones y es el docente quien debe ayudar a establecer las relaciones entre ambos casos.

Sin duda, el abordaje de las fracciones presenta numerosas dificultades a la hora de la enseñanza. Analizar exhaustivamente este contenido y diseñar secuencias que recorran todos los casos posibles, ayudaría a la comprensión de los alumnos y los enfrentaría a desafíos interesantes.

El desafío es, como decíamos en el artículo anterior, presentar verdaderos problemas con fracciones, para que las fracciones dejen de ser un problema. 